Ejercicios resueltos

Boletín 4

Movimiento ondulatorio

Ejercicio 1

La nota musical **la** tiene una frecuencia, por convenio internacional de 440 Hz. Si en el aire se propaga con una velocidad de 340 m/s y en el agua lo hace a 1400 m/s, calcula su longitud de onda en esos medios.

Solución 1

La frecuencia es una característica del centro emisor. Por tanto es la misma en todos los medios.

$$\lambda_{aire} = \frac{v_{aire}}{\nu} = \frac{340}{400} = 0{,}773 \text{ m}$$

$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{\nu} = \frac{1400}{400} = 3{,}27 \text{ m}$$

Ejercicio 2

La ecuación de una onda, en unidades del S.I., que se propaga por una cuerda es:

$$y(x, t) = 0{,}05 \cos 2\pi\,(4\,t - 2\,x)$$

1. Determina las magnitudes características de la onda (amplitud, frecuencia angular, número de onda, longitud de onda, frecuencia, periodo, velocidad de propagación)
2. Deduce las expresiones generales de la velocidad y aceleración transversal de un elemento de la cuerda y sus valores máximos.
3. Determina los valores de la elongación, velocidad y aceleración de un punto situado a 1 m del origen en el instante $t = 3$ s

Solución 2

1. Operando en la expresión de la onda: $y(x, t) = 0{,}05 \cos(8\,\pi\,t - 4\,\pi\,x)$ y comparando con la expresión general: $y(x, t) = A \cos(\omega\,t - k\,x)$ se tiene que:

   Amplitud: $A = 0{,}05$ m;

frecuencia angular: $\omega = 8\,\pi$ rad/s;

número de onda: $k = 4\,\pi$ rad/m;

longitud de onda: $\lambda = \dfrac{2\,\pi}{k} = \dfrac{2\,\pi}{4\,\pi} = 0{,}5$ m;

frecuencia: $\nu = \dfrac{\omega}{2\,\pi} = \dfrac{8\,\pi}{2\,\pi} = 4$ Hz;

periodo: $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ s;

velocidad de propagación: $v = \lambda\,\nu = \dfrac{\omega}{k} = 0{,}5 \cdot 4 = \dfrac{8\,\pi}{4\,\pi} = 2$ m/s

2. Velocidad de vibración:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0{,}4\,\pi\,\sin 2\,\pi\,(4\,t - 2\,x)\ \text{m/s} \ \Rightarrow v_{máx} = 0{,}4\,\pi\ \text{m/s}$$

Aceleración de vibración:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -3{,}2\,\pi^2\,\cos 2\,\pi\,(4\,t - 2\,x)\ \text{m/s}^2 \ \Rightarrow a_{máx} = 3{,}2\,\pi^2\ \text{m/s}^2$$

3. Para calcular la elongación, velocidad y aceleración del punto considerado en el instante indicado, basta sustituir sus valores en las ecuaciones generales correspondientes.

$$y(x = 1, t = 3) = 0{,}05\,\cos 2\,\pi\,(4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 0{,}05\ \text{m}$$

El punto se encuentra en su máxima separación central y hacia la parte positiva.

$$v(x = 1, t = 3) = -0{,}4\,\pi\,\sin 2\,\pi\,(4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 0\ \text{m/s}$$

El punto está en un extremo de la vibración y por ello su velocidad es igual a cero.

$$a(x = 1, t = 3) = -3{,}2\,\pi^2\,\cos 2\,\pi\,(4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -3{,}2\,\pi^2\ \text{m/s}^2$$

Al estar el punto en el extremo positivo de la vibración, la aceleración es máxima y de sentido negativo, se dirige hacia el centro de la oscilación.

Ejercicio 3

Se agita el extremo de una cuerda con una frecuencia de 2 Hz y una amplitud de 3 cm. Si la perturbación se propaga con una velocidad de 0,5 m/s, escribe la expresión que representa el movimiento por la cuerda.

Solución 3

La frecuencia angular es: $\omega = 2\,\pi\,\nu = 4\,\pi$ rad/s
El número de onda es: $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} = \dfrac{2\,\pi}{v/\nu} = \dfrac{2\,\pi}{0{,}5/2} = 8\,\pi$ m^{-1}
La expresión pedida es:

$$y = A\,\cos(\omega\,t - k\,x) = 0{,}03\,\cos(4\,\pi\,t - 8\,\pi\,x)$$

Operando:

$$y = 0{,}03\,\cos 4\,\pi(t - 2\,x)$$

Ejercicio 4

Un foco genera ondas de 2 mm de amplitud con una frecuencia de 250 Hz, que se propagan por un medio con una velocidad de 250 m/s. Determina el periodo y la longitud de onda de la perturbación. Si en el instante inicial la elongación de un punto situado a 3 m del foco es $y = -2$ mm, determina la elongación de un punto situado a 2,75 m del foco en el mismo instante.

Solución 4

Periodo: $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{250} = 4\cdot 10^{-3}$ s; frecuencia angular: $\omega = 2\,\pi\,\nu = 500\,\pi$ rad/s; longitud de onda: $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{250}{250} = 1$ m; número de onda: $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} = 2\,\pi$ m^{-1}

En este caso y como los datos de vibración no son los del foco, debe introducirse una fase inicial φ_0 que se determina con las condiciones de vibración del punto $x = 3$ m.

$$y = A\,\cos(\omega\,t - k\,x + \varphi_0) = 2\cdot 10^{-3}\,\cos(500\,\pi\,t - 2\,\pi\,x + \varphi_0)$$

Operando:

$$y = 2\cdot 10^{-3}\,\cos[2\,\pi(250\,t - x) + \varphi_0]$$

Sustituyendo los datos de vibración del punto consideradom, resulta que:

$$y(x = 3, t = 0) = 2\cdot 10^{-3}\,\cos[2\,\pi(250\cdot 0 - 3) + \varphi_0] = -2\cdot 10^{-3}\text{ m } \Rightarrow \cos(-6\,\pi + \varphi_0) = -1$$

Por lo que la fase inicial es: $\varphi_0 = \pi$ rad

La ecuación general de la onda es:

$$y = 2\cdot 10^{-3}\,\cos[2\,\pi(250\,t - x) + \pi]$$

La elongación del punto $x = 2{,}75$ m en el instante pedido es:

$$y(x = 2{,}75, t = 0) = 2\cdot 10^{-3}\,\cos[2\,\pi(250\cdot 0 - 2{,}75) + \pi] = 2\cdot 10^{-3}\,\cos(6{,}5\,\pi) = 0\text{ m}$$

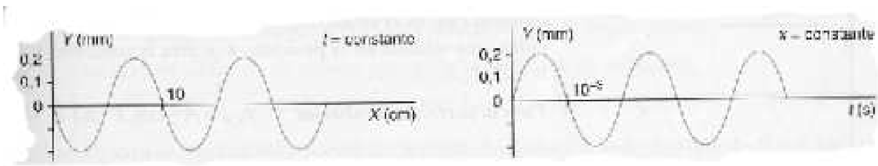
Ejercicio 5

En una cuerda elástica se mueve una onda progresiva transversal sinusoidal. Determina su ecuación conociendo las elongaciones de cada partícula de la cuerda en el instante $t = 0$ s y la elongación en función del tiempo para el origen que ocupa la posición $x = 0$ m.

Solución 5

De la gráfica $t = cte$, se deducen los valores de la longitud de onda y de la amplitud.

$$\lambda = 10 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ m}; \; A = 0{,}2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$



De la gráfica $x = cte$, se obtiene el valor del periodo: $T = 2 \cdot 10^{-3}$ s;

De esta misma gráfica se deduce que la elongación del origen es cero en el instante inicial, que la partícula se dirige hacia elongaciones positivas y que la perturbación avanza en el sentido positivo del eje de abscisas. Si se elige para la descripción del movimiento la función seno, entonces la fase inicial, φ_0, es igual a cero.

Por tanto la expresión que describe el movimiento es:

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2 \cdot 10^{-4} \sin 2\pi \left(\frac{t}{2 \cdot 10^{-3}} - \frac{x}{0{,}1} \right) \text{ m}$$

Simplificando:

$$y(x,t) = 2 \cdot 10^{-4} \sin 2\pi (500\, t - 10\, x) \text{ m}$$

Ejercicio 6

Una onda transversal de 1 cm de amplitud y 100 Hz de frecuencia se propaga a lo largo del eje de abscisas con una velocidad de 20 m/s. Escribe la expresión de la elongación, velocidad y aceleración de una partícula situada a 10 cm del foco. ¿En qué instante alcanza esa partícula los valores máximos de las expresiones anteriores?

Solución 6

Con los datos del ejercicio se determinan las magnitudes que caracterizan a la onda. Amplitud: $A = 0{,}01$ m; frecuencia: $\nu = 100$ Hz; periodo: $T = 0{,}01$ s; longitud de onda: $\lambda = 0{,}2$ m; frecuencia angular: $200\,\pi$ rad/s; número de onda: $k = 10\,\pi$ rad/m.

Considerando que en el instante inicial el foco vibra con su máxima amplitud, se tiene que la expresión general de la onda es:

$$y(x,t) = A \cos(\omega\, t - k\, x) = 10^{-2} \cos(200\,\pi\, t - 10\,\pi\, x) = 10^{-2} \cos 2\pi(100\, t - 5\, x) \text{ m}$$

El tiempo que transcurre hasta que le llega la perturbación a la posición $x = 0{,}1$ m es:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{0{,}1}{20} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}$$

a)La expresión de la elongación se determina sustituyendo la posición en la ecuación de la onda.

$$y(x = 0{,}1, t) = 10^{-2}\cos 2\,\pi(100\,t - 5 \cdot 0{,}1) = 10^{-2}\cos 2\,\pi(100\,t - 0{,}5)\ \mathrm{s}$$

que alcanza su máximo valor si:

$$\cos 2\,\pi(100\,t - 0{,}5) = 1 \ \Rightarrow 2\,\pi(100\,t - 0{,}5) = 0\ \mathrm{rad}$$

lo que ocurre en el instante:

$$t = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}$$

Tiempo que coincide con lo que tarda en llegar al punto la perturbación procedente del foco, ya que como el foco posee su máxima elongación en el instante inicial, esta misma elongación la adquiere el punto considerado en el mismo instante en que le llegue la onda.

b) La velocidad de vibración se obtiene aplicando la definición de velocidad:

$$v(x = 0{,}1, t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 10^{-2}\,2\,\pi\,100\,(-\sin 2\,\pi(100\,t - 0{,}5)) = -2\,\pi\,\sin 2\,\pi(100\,t - 0{,}5)\ \mathrm{m/s}$$

que alcanza su máximo valor si:

$$\sin 2\,\pi(100\,t - 0{,}5) = -1 \ \Rightarrow 2\,\pi(100\,t - 0{,}5) = \frac{3\,\pi}{2}\ \mathrm{rad}$$

que sucede en el instante:

$$t = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

Este tiempo transcurrido es la suma de los $5 \cdot 10^{-3}$ s que tarda en llegar la perturbación al punto considerado y comenzar a vibrar con la máxima amplitud, más los $7{,}5 \cdot 10^{-3}$ s, $3T/4$, que emplea en llegar al centro de la oscilación dirigiéndose hacia elongaciones positivas, que es donde su velocidad es máxima.

c) Aplicando la definición de aceleración, se tiene que:

$$a(x = 0{,}1, t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\,\pi\,2\,\pi\,100\,\cos 2\,\pi(100\,t - 0{,}5) = -400\,\pi^2\,\cos 2\,\pi(100\,t - 0{,}5)\ \mathrm{m/s^2}$$

que alcanza su máximo valor si:

$$\cos 2\,\pi(100\,t - 0{,}5) = -1 \ \Rightarrow 2\,\pi\,(100\,t - 0{,}5) = \pi\ \mathrm{rad}$$

lo que acontece en el instante:

$$t = 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

Este tiempo es la suma de los $5 \cdot 10^{-3}$ s que tarda en llegar la perturbación al punto considerado y comenzar a vibrar con la máxima amplitud, más otros $5 \cdot 10^{-3}$ s, $T/2$, que emplea en llegar al otro extremo de la vibración donde su aceleración es de signo positivo.

Ejercicio 7

La ecuación de una onda que se propaga transversalmente por una cuerda expresada en unidades del S.I. es:

$$y(x,t) = 0{,}06\,\cos 2\,\pi\,(4\,t - 2\,x)$$

1. Determina el periodo y la longitud de onda.

2. Calcula la diferencia de fase entre los estados de vibración de una partícula cualquiera de la cuerda en los instantes $t = 0$ s, $t = 0{,}5$ s y $t = 0{,}625$ s.

3. Representa gráficamente la forma que adopta la cuerda en los instantes anteriores.

4. Halla la diferencia de fase entre los estados de vibración en un instante para las partículas situadas en las posiciones $x = 0$ m, $x = 1$ m y $x = 1{,}25$ m.

5. Representa gráficamente los movimientos vibratorios de las partículas anteriores.

Solución 7

1. El periodo y la longitud de onda se determinan comparando la expresión dada con la general.

   $$y(x,t) = A\,\cos 2\,\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

   Por tanto: $4 = \dfrac{1}{T} \Rightarrow T = 0{,}25$ s; $2 = \dfrac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0{,}5$ m.

2. Diferencia de fase para una partícula entre los instantes $t = 0$ s y $t = 0{,}5$ s.

   $$\Delta\varphi = \varphi(t = 0{,}5) - \varphi(t = 0) = 2\,\pi\,(4 \cdot 0{,}5 - 2\,x) - 2\,\pi\,(4 \cdot 0 - 2\,x) = 2 \cdot 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

   Los instantes $t = 0$ s y $t = 0{,}5$ s están en fase, pues están separados en el tiempo por un número entero de periodos:

   $$\Delta t = 0{,}5 - 0 = 2 \cdot 0{,}25 \text{ s} = 2\,T$$

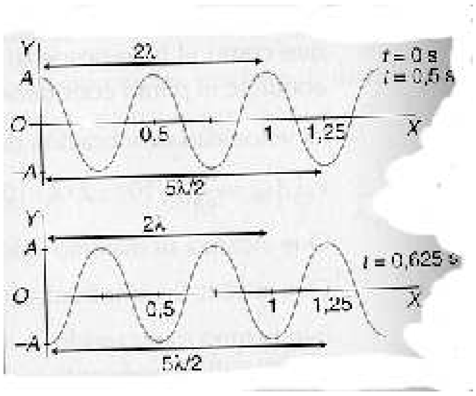
   Diferencia de fase para una partícula entre los instantes $t = 0$ s y $t = 0{,}625$ s.

   $$\Delta\varphi = \varphi(t = 0{,}625) - \varphi(t = 0) = 2\,\pi\,(4 \cdot 0{,}625 - 2\,x) - 2\,\pi\,(4 \cdot 0 - 2\,x) = 5\,\pi = (2 \cdot 2 \cdot \pi + \pi) \text{ rad}$$

   Los instantes están en oposición de fase pues la separación en el tiempo es un múltiplo impar de semiperiodos:

   $$\Delta t = 0{,}625 - 0 = 2{,}5 \cdot 0{,}25 \text{ s} = 2\,T + \frac{T}{2}$$

3. Al fijar el tiempo, la ecuación de onda indica la elongación de cada punto de la cuerda en ese instante. Para la representación gráfica, se determina la elongación



del origen en los instantes pedidos y se tiene presente que la onda se repite a lo largo del eje X cada $\lambda = 0{,}5$ m.

$$y(0,0) = 0{,}06 \cos 2\,\pi(4 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0{,}06 \text{ m}$$

La elongación es máxima y positiva.

$$y(0, 0{,}5) = 0{,}06 \cos 2\,\pi(4 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0) = 0{,}06 \text{ m}$$

pues está en fase con el anterior.

$$y(0, 0{,}625) = 0{,}06 \cos 2\,\pi(4 \cdot 0{,}625 - 2 \cdot 0) = -0{,}06 \text{ m}$$

en oposición de fase con los anteriores.

4. Diferencia de fase en un instante para las partículas situadas en $x = 0$ m y $x = 1$ m.

$$\Delta\varphi = \varphi(x = 0) - \varphi(x = 1) = 2\,\pi\,(4\,t - 2 \cdot 0) - 2\,\pi\,(4\,t - 2 \cdot 1) = 2 \cdot 2\,\pi \text{ rad}$$

Las dos posiciones están en fase pues están separadas por una distancia igual a un múltiplo entero de longitudes de onda:

$$\Delta x = 1 - 0 = 2 \cdot 0{,}5 \text{ m} = 2\,\lambda$$

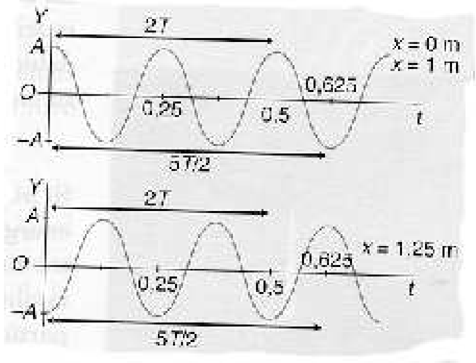
Diferencia de fase en un instante para las posiciones $x = 0$ m y $x = 1{,}25$ m.

$$\Delta\varphi = \varphi(x = 0) - \varphi(x = 1{,}25) = 2\,\pi\,(4\,t - 2 \cdot 0) - 2\,\pi\,(4\,t - 2 \cdot 1{,}25) = 5\,\pi = (2 \cdot 2 \cdot \pi + \pi) \text{ rad}$$

Las dos posiciones están en oposición de fase pues están separadas por una distancia igual a un múltiplo impar de semilongitudes de onda:

$$\Delta x = 1{,}25 - 0 = 2{,}5 \cdot 0{,}5 \text{ m} = 2\,\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

5. Al fijar la posición, la ecuación de onda indica la elongación a lo largo del tiempo de esa partícula determinada, es decir, el movimiento vibratorio de la partícula fijada. Para la representación gráfica, se determina la elongación en el instante inicial de las



partículas y se tiene en cuenta que las vibraciones se repiten a lo largo del tiempo con un periodo $T = 0{,}25$ s.

$$y(0,0) = 0{,}06 \cos 2\,\pi(4 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0{,}06 \text{ m}$$

La elongación es máxima y positiva.

$$y(1,0) = 0{,}06 \cos 2\,\pi(4 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 0{,}06 \text{ m}$$

pues está en fase con el anterior.

$$y(1{,}25,0) = 0{,}06 \cos 2\,\pi(4 \cdot 0 - 2 \cdot 1{,}25) = -0{,}06 \text{ m}$$

está en oposición de fase con los anteriores.

Ejercicio 8

Un oscilador vibra con una frecuencia de 500 Hz y genera ondas que se propagan con una velocidad de 350 m/s. Halla:

1. La separación de dos puntos consecutivos que vibren con una diferencia de fase de 60°.
2. El intervalo de tiempo que transcurre entre dos estados de vibración consecutivos de un punto con una diferencia de fase de 180°.
3. Diferencia de fase en un instante cualquiera entre dos puntos separados por una distancia de 3,15 m.

Solución 8

El periodo y la longitud de onda son: $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{500} = 2 \cdot 10^{-3}$ s; $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{350}{500} = 0{,}7$ m

1. Un desfase de 60° corresponde a: $\Delta\varphi = 60° = \dfrac{60 \cdot 2\,\pi}{360} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

   Dos puntos separados por una distancia $\lambda = 0{,}7$ m están desfasados $2\,\pi$ rad. Por tanto:

   $$\Delta x = \frac{\pi}{3}\,\frac{0{,}7}{2\,\pi} = 0{,}117 \text{ m}$$

2. Una diferencia de fase de 180° es equivalente a π rad y los instantes están en oposición de fase.

   Dos instantes separados por un tiempo $T = 2 \cdot 10^{-3}$ s están desfasados $2\,\pi$ rad. Por tanto:
   $$\Delta t = \pi \frac{T}{2\,\pi} = \pi \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2\,\pi} = 10^{-3} \text{ s}$$
   que es un tiempo igual a la mitad del periodo.

3. Dos puntos separados por una distancia $\lambda = 0{,}7$ m están desafasados $2\,\pi$ rad. Por tanto:
   $$\Delta\varphi = 2\,\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\,\pi \frac{3{,}15}{0{,}7} = 2\,\pi\, 4{,}5 = (4 \cdot 2 \cdot \pi + \pi) \text{ rad} = \pi \text{ rad}$$
   Los dos puntos están en oposición de fase.

   A la misma conclusión se llega expresando la distancia en función de la longitud de onda. $\Delta x = 3{,}15 = 4{,}5 \cdot 0{,}7 = \dfrac{9}{2}\,\lambda$, que es un múltiplo impar de semilongitudes de onda.

Ejercicio 9

Una onda que se propaga por una cuerda, responde a la ecuación, en unidades del S.I.:
$$y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(80\,t - 6\,x)$$
Si la cuerda tiene un extremo fijo en una pared, escribe la ecuación de la onda reflejada.

Solución 9

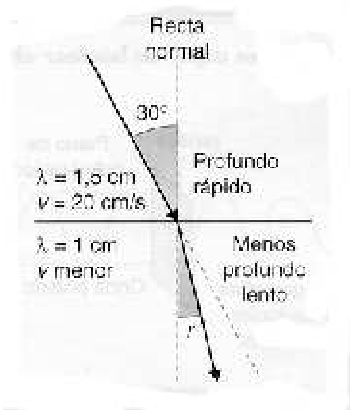
La onda reflejada se propaga hacia la izquierda y está en oposición de fase con la incidente.
$$y(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(80\,t + 6\,x + \pi)$$
Teniendo en cuenta que $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$, queda que la ecuación de la onda reflejada es:
$$y(x,t) = -3 \cdot 10^{-3} \sin(80\,t + 6\,x)$$

Ejercicio 10

Una onda, de 4 cm de longitud de onda, se propaga por la superficie del agua de una cubeta de ondas con una velocidad de 20 cm/s. En un instante dado el frente de ondas accede a una zona menos profunda con un ángulo de 30°, respecto a la superficie de la recta que separa los dos medios. Si la longitud de onda en este segundo medio es 3 cm, deduce la dirección por la que se propaga.

Solución 10

La frecuencia de la onda es la misma en los dos medios, por ser una característica del centro emisor.



$$\nu = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{20}{4} = 5 \text{ Hz}$$

Al pasar al segundo medio la frecuencia permanece constante y la longitud de onda disminuye, por lo que la velocidad de propagación es:

$$v_2 = \lambda_2\, \nu = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm/s}$$

Aplicando la ley de Snell:

$$\frac{\sin\, \theta_i}{\sin\, \theta_R} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\sin\, \theta_R = \frac{v_2}{v_1} \sin\, \theta_i = \frac{15}{20} \sin\, 30^\circ = 0{,}375$$

El ángulo que forma la dirección de propagación en el segundo medio con la recta normal es:

$$\theta_R = \arcsin\, 0{,}375 = 22^\circ\, 1'\, 28''$$

Ejercicio 11

Al oscilador de una cubeta de ondas se le acopla un accesorio que consta de dos punzones separados por una distancia de 4 cm. Al incidir sobre la superficie del agua generan ondas coherentes con una frecuencia de 24 Hz, que se propagan con una velocidad de 12 cm/s. Determina el tipo de perturbación que existirá en un punto A que dista 10 cm de un foco y 12 cm del otro y en otro punto C que dista 8 cm de un foco y 9,75 cm del otro.

Solución 11

La longitud de onda de las perturbaciones es: $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{12}{24} = 0{,}5$ cm

Para el punto A, la diferencia de caminos a los focos es:

$$x_1 - x_2 = 12 - 10 = 2 \text{ cm} = 4 \cdot 0{,}5 = 4\,\lambda$$

Que es un múltiplo entero de la longitud de onda y la interferencia es constructiva.

Para el punto C, la diferencia de caminos hasta los focos es:

$$x_1 - x_2 = 9{,}75 - 8 = 1{,}75 \ \text{ cm} = 1{,}75\,\frac{\lambda}{0{,}5} = 7\,\frac{\lambda}{2}$$

Que es un múltiplo impar de la semilongitud de onda y la interferencia es destructiva.

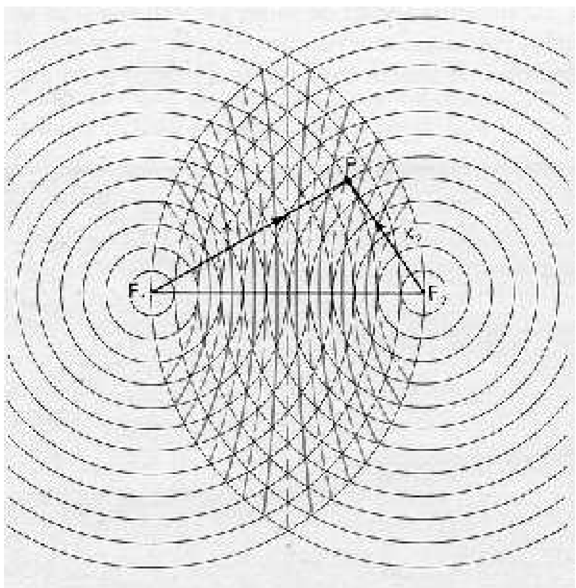
Ejercicio 12

En dos puntos de la superficie de un estanque se dejan caer simultáneamente gotas de agua. representa geométricamente las interferencias que se producen en los puntos de la superficie del agua, en el supuesto de que las perturbaciones sean ondas coherentes.

Solución 12

Al caer las gotas de agua generan ondas circulares. Se traza con centro en un punto (foco F_1) una serie de círculos concéntricos igualmente espaciados, alternando los de trazo continuo con los de trazo discontinuo. Asignamos los trazos continuos a crestas y los trazos discontinuos a valles. Duplicamos el dibujo anterior en torno a otro punto que es el foco F_2.

Al superponer los diagramas se observan puntos en los que se cortan dos crestas o dos valles y en ellos la interferencia es constructiva. Mientras que en los puntos que se superpone una cresta con un valle la interferencia es destructiva.



A los puntos del plano cuya amplitud es nula se le llaman **nodos** y las líneas que los unen **líneas nodales** (líneas de trazo discontinuo del diagrama).

Estas líneas se caracterizan por englobar a los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, los focos de las ondas, es una constante y responden a la ecuación:

$$x_1 - x_2 = (2\,n + 1)\,\frac{\lambda}{2}$$

Que es la ecuación de una familia de hipérbolas de focos F_1 y F_2, determinada cada una de ellas por un valor de n. Su posición no se ve afectada por la propagación de los movimientos ondulatorios, están en estado estacionario. Lo mismo se puede decir para los puntos de interferencia constructiva, hipérbolas de trazo continuo en el dibujo.

Ejercicio 13

Dos ondas sonoras, de ecuación $y = 1{,}2 \cos 2\,\pi(170\,t - 0{,}5\,x)$ Pa, proceden de dos focos coherentes e interfieren en un punto P que dista 20 m de un foco y 25 m del otro foco. Determina la perturbación que originan en el punto P cada uno de los focos, en el instante $t = 1$ s. Calcula la diferencia de fase de las ondas al llegar al punto considerado y determina la amplitud de la perturbación total en el citado punto.

Solución 13

Las perturbaciones a las que se somete el punto P, en el instante pedido son:

$$y(20, 1) = 1{,}2 \cos 2\,\pi(170 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 20) = 1{,}2 \cos(2\,\pi\,160) = 1{,}2 \text{ Pa}$$

$$y(25, 1) = 1{,}2 \cos 2\,\pi(170 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 25) = 1{,}2 \cos(2\,\pi\,157{,}5) = -1{,}2 \text{ Pa}$$

La perturbación total es la suma de las perturbaciones $y_{total} = 0$, la interferencia en el punto P es destructiva.

Algo que se puede comprobar determinando la diferencia de fase o comparando la diferencia de recorridos de las perturbaciones con la longitud de onda.

$$\Delta\varphi = \varphi(x = 20) - \varphi(x = 25) = 2\,\pi(170\,t - 0{,}5 \cdot 20) - 2\,\pi(170\,t - 0{,}5 \cdot 25) \text{ rad}$$

Operando:

$$\Delta\varphi = 2{,}5 \cdot 2\,\pi = 2 \cdot 2\,\pi + \pi \text{ rad}$$

Las dos ondas llegan en oposición de fase.

De la ecuación de la onda se deduce que: $k = 2\,\pi\,0{,}5 = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2$ m

Para la diferencia de caminos se cumple que:

$$x_{25} - x_{20} = 25 - 20 = 5 \text{ m} = 5\,\frac{\lambda}{2}$$

que es un múltiplo impar de semilongitudes de onda y por tanto la interferencia es destructiva.

Ejercicio 14

Dos focos sonoros vibran en fase con una frecuencia de 500 Hz y una amplitud de presión igual a Δp_0. Calcula la diferencia de fase con que llegan las perturbaciones a un punto P situado a 5m de uno de los focos y a 5,17 m del otro. ¿Cuál es la relación entre la amplitud de presión, Δp_0, y la amplitud que tiene la perturbación en el citado punto?

Dato: $v_{sonido} = 340$ m/s

Solución 14

La longitud de onda de los sonidos emitidos es: $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{340}{500} = 0{,}68$ m

Aplicando la relación entre la diferencia de fase, la longitud de onda y la diferencia de caminos recorridos, se tiene que la diferencia de fase es:

$$\Delta\varphi = k\,(x_1 - x_2) = \frac{2\,\pi}{\lambda}\,(x_1 - x_2) = \frac{2\,\pi}{0{,}68}\,(5{,}17 - 5) = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$$

La amplitud resultante con la que vibra un punto del medio en el que interfieren dos ondas coherentes es:

$$A_r = 2\,A\,\cos\left(k\,\frac{x_1 - x_2}{2}\right) = 2\,A\,\cos\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Sustituyendo, queda que la amplitud de la perturbación, en términos de presión es:

$$\Delta p_r = 2\,\Delta p_0\,\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\,\Delta p_0\,\cos\frac{\pi/2}{2} = 1{,}41\,\Delta p_0 \;\Rightarrow \frac{\Delta p_r}{\Delta p_0} = 1{,}41$$

Ejercicio 15

Una onda estacionaria de ecuación:

$$y = 0{,}02\,\sin(10\,\frac{\pi}{3}\,x)\,\cos(40\,\pi\,t)$$

en unidades del S.I., se propaga por una cuerda. Determina: la amplitud, frecuencia y longitud de onda de las ondas que por superposición provocan la vibración descrita.

Solución 15

Comparando la ecuación anterior con la ecuación general de una onda estacionaria, se tiene:

$$y = 2\,A\,\sin(k\,x)\,\cos(\omega\,t)$$

Amplitud: $2\,A = 0{,}02$ m $\Rightarrow A = 0{,}01$ m; Longitud de onda: $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} = 10\,\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \lambda = \dfrac{3}{5}$ m;
Frecuencia: $\omega = 2\,\pi\,\nu = 40\,\pi \Rightarrow \nu = 20$ Hz

Ejercicio 16

Una cuerda de guitarra de 1 m de larga fija por ambos extremos vibra formando 4 nodos. Los puntos centrales de la cuerda tienen un desplazamiento máximo de 4 mm. Si la velocidad de las ondas en la cuerda es 660 m/s, halla la frecuencia con la que vibra la cuerda y la expresión de la función de la onda estacionaria.

Solución 16

Si la cuerda forma cuatro nodos, de la figura se deduce que la longitud de la cuerda es igual a tres semilongitudes de onda.

$$L = 3\,\frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow \lambda = \frac{2\,L}{3} = \frac{2\cdot 1}{3} = \frac{2}{3}\text{ m}$$

Y la frecuencia de vibración es:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{660}{2/3} = 990\text{ Hz}$$

La ecuación de la onda estacionaria es:

$$y = 2\,A\,\sin(k\,x)\cos(\omega\,t) = 2{\cdot}4{\cdot}10^{-3}\,\sin\left(\frac{2\,\pi}{2/3}\,x\right)\cos(2\,\pi\,990\,t) = 8{\cdot}10^{-3}\,\sin(3\,\pi\,x)\cos(1980\,\pi\,t)$$

Ejercicio 17

Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación:

$$y = 10\,\sin\frac{\pi}{3}\,x\cos 20\,\pi\,t$$

donde x e y vienen expresados en centímetros y t en segundos.

1. Calcula la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de las ondas componentes, cuya superposición puede dar lugar a la onda dada.
2. ¿Qué distancia hay entre nodos?
3. ¿Cuál es la velocidad de oscilación de un punto de la cuerda en la posición $x = 4{,}5$ cm y en el tiempo $t = 0{,}4$ s?
4. ¿Se transporta energía en dicha onda?

Solución 17

1. La ecuación de la onda dada muestra una amplitud que es función de la posición x, de modo que:

$$A' = 10\,\sin\frac{\pi}{3}\,x$$

Se trata, pues, de una onda estacionaria. Teniendo en cuenta que la ecuación general de una onda estacionaria producida por la superposición de dos ondas idénticas que se propagan sobre la misma cuerda en sentidos opuestos es:

$$y = 2\,A\,\sin(k\,x)\cos(\omega\,t)$$

donde A, k y ω son, respectivamente, la amplitud, el número de onda y la frecuencia angular de las ondas componentes, entonces, por comparación con nuestra onda:

$$2\,A = 10 \;\Rightarrow A = 5 \text{ cm}$$

Por otro lado, como en la ecuación $k = \pi/3$, y dado que sabemos que $k = 2\,\pi/\lambda$, obtenemos:

$$\lambda = 6 \text{ cm}$$

Y puesto que, a su vez, $k = \omega/v$, la velocidad de propagación de las ondas componentes será:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{20\,\pi}{\pi/3} = 60 \text{ cm/s}$$

2. La distancia entre dos nodos consecutivos es $\lambda/2$; así:

   distancia entre nodos $= 3$ cm

3. La velocidad de oscilación de un punto de la cuerda es:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -20\,\pi\left(10\,\sin\frac{\pi}{3}\,x\right)\sin\,20\,\pi\,t$$

   Como puede verse, la velocidad de oscilación de un punto de una cuerda donde se ha establecido una onda estacionaria depende también de la posición, cosa que no ocurre con una onda armónica viajera. Al sustituir el valor del tiempo ofrecido como dato, comprobamos que $\sin(20\,\pi\cdot 0{,}4) = 0$, por lo que la **velocidad de oscilación** de dicho punto en ese instante **es cero**. Sin embargo, dicho punto no es un nodo, pues, al sustituir el valor de x por el que se nos da en el enunciado, comprobamos que su amplitud es de -10 cm, por lo que se trata de un antinodo o vientre.

4. En una onda estacionaria no se produce transporte de energía, pues los nodos no oscilan en ningún momento, por lo que parece claro que a ellos no les llega ningún tipo de energía. Decimos, entonces, que la energía de una onda estacionaria se encuentra confinada entre los nodos.